TD 17 : Polynômes

Sauf mention explicite du contraire, $\mathbf{K}$ est un corps quelconque.

▶ L'anneau $\mathbf{K}[X]$

Exercice 17.1 Déterminer le groupe des unités de l'anneau $\mathbf{K}[X]$. il s'agit de determiner les pollynomes inversibles **PD**

Exercice 17.2 Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit pair (respectivement impair) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$). **PD**

1. Montrer qu'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ est pair si et seulement si $\forall k \in \mathbf{N}$, $a_{2k+1} = 0$.
   Donner alors une condition nécessaire et suffisante portant sur les $P^{(k)}(0)$ pour que P soit pair.
2. Déterminer des conditions similaires pour qu'un polynôme soit impair.
3. Prouver qu'un polynôme P est pair si et seulement si $\forall k \in \mathbf{N}$, $P(k) = P(-k)$. La même condition est-elle valable pour une fonction continue ?

Exercice 17.3 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que : **PD**

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
2. $P \circ P = P$
3. $(P')^2 = 4P$.

Exercice 17.4 Formule de Vandermonde **PD**

Soient $m, n, r \in \mathbf{N}$. En développant de deux manières le produit $(1+X)^m(1+X)^n$, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.

▶ Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$, racines d'un polynôme

Exercice 17.5 **PD**

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Quelle est la multiplicité de 1 comme racine de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste de la division de $X^n(X+1)^2$ par $(X+1)(X-2)$.

Exercice 17.6 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbf{N}$ le polynôme $P_n = (X-1)^n - X^n + 2X - 1$ est-il divisible (dans $\mathbf{R}[X]$) par $Q = 2X^3 - 3X^2 + X$? **PD**

Exercice 17.7 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $P \in \mathbf{K}[X]$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il est divisible par $X^n - 1$. **PD**

Exercice 17.8 Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$. **PD**

Exercice 17.9 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $P(a) > 0$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geqslant 0$. **PD**
Prouver que P n'a pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Exercice 17.10 La fonction $z \mapsto \overline{z}$ est-elle polynomiale ? **PD**

Exercice 17.11 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, **PD**

1. $P(n) = n^2$
2. $P(n) = n^2 + (-1)^n$

Exercice 17.12 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire dont tous les coefficients sont des entiers relatifs. **PD**

1. Prouver que toute racine rationnelle de P est dans $\mathbf{Z}$.
2. Soient $k, d \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\sqrt[k]{d}$ est soit entier, soit irrationnel.

Exercice 17.13 Montrer que les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ne sont pas polynomiales. **PD**

Exercice 17.14 Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbf{C}[X]$. On note alors $M = \sup\{|f(z)|, |z| = 1\}$. **AD**

1. Justifier que M est bien défini.
2. On note $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$. En calculant $P(1) + P(\zeta) + \cdots + P(\zeta^n)$, prouver que $|a_0| \leqslant M$.
3. Prouver que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $|a_k| \leqslant M$.

Exercice 17.15 Montrer que $X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ possède j comme racine double. En déduire sa factorisation irréductible sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$. **AD**

Exercice 17.16 **(Banque CCP 85)** PD
Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 17.17 Soient $a, b \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $X^a - 1$ divise $X^b - 1$ si et seulement si $a \mid b$. AD

Exercice 17.18 **La divisibilité dans $\mathbf{C}[X]$ de polynômes réels implique leur divisibilité dans $\mathbf{R}[X]$** AD

1. Soient A et B deux polynômes à coefficients réels, tels que A divise B dans $\mathbf{C}[X]$. Justifier que A divise B dans $\mathbf{R}[X]$.
2. Quels sont les entiers naturels n tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$?

Exercice 17.19 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que P' divise P. AD

Exercice 17.20 **(Oral ENS)** D
Quels sont les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que $P(\mathbf{C}) \subset \mathbf{R}$?

Exercice 17.21 **(Oral Polytechnique)** AD

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(X) = \prod_{k=1}^{n} (\cos(a_k) + \sin(a_k)X)$ par $X^2 + 1$.

Exercice 17.22 **Sommes de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$** D
On note $\Sigma = \{A^2 + B^2, (A, B) \in \mathbf{R}[X]\}$ l'ensemble des polynômes qui sont somme de deux carrés.

1. En utilisant l'application $\mathbf{C}[X] \to \mathbf{R}[X]$ définie par $Q \mapsto Q\overline{Q}$, montrer que Σ est stable par produit.
2. Montrer que si $P \in \Sigma$, alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $P(x) \geqslant 0$.
3. Inversement, soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$, $P(x) \geqslant 0$.
   (a) Montrer que toutes les racines réelles de P sont d'ordre de multiplicité pair.
   (b) En utilisant la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles, prouver que $P \in \Sigma$.

▸ Polynômes d'interpolation de Lagrange

Exercice 17.23 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbf{K}$, et soient $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} L_k = 1$. PD

Exercice 17.24 Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\forall P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right)$. AD

Exercice 17.25 Soient m, n deux entiers supérieurs ou égaux à 2, premiers entre eux. Montrer que $(X^n - 1)(X^m - 1)$ divise $(X^{mn} - 1)(X - 1)$. D
Ce résultat reste-t-il vrai si m et n ne sont pas premiers entre eux ?

Exercice 17.26 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que $P(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, puis $P(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$. D

Exercice 17.27 **Fait suite au précédent (Oral ENS)** TD
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ qui induisent une surjection de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$.

▸ Relations racines coefficients

Exercice 17.28 Soit $P \in \mathbf{C}[X]$, de degré n. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note s_k la somme des racines (comptées avec multiplicité) de $P^{(k)}$. AD
Montrer que $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ est une progression arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 17.29 AD

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Factoriser sur $\mathbf{C}$ le polynôme $P_n = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-2} + X^{n-1}$.
2. En déduire une expression de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$.
3. Pour $\theta \in \mathbf{R}$, donner alors une expression de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.
4. Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant k, \ell \leqslant n-1 \\ k \neq \ell}} \left(\zeta^k - \zeta^\ell\right)$.

Exercice 17.30 On note ($\mathscr{S}$) le système (non linéaire !) d'équations suivantes : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$, d'inconnues $(x,y,z) \in (\mathbf{C}^*)^3$. **AD**

1. Pour $(x,y,z) \in (\mathbf{C}^*)^3$, on pose $P=(X-x)(X-y)(X-z) \in \mathbf{C}[X]$.
   Si (x,y,z) est solution de $\mathscr{S}$, déterminer P.
2. En déduire les solutions de ($\mathscr{S}$).